

1^{ère} partie : Suites numériques

Synthèse rappels de cours

Suite numérique

Une suite numérique u est une **fonction** qui associe à un entier naturel n un nombre réel noté $u(n)$ ou u_n .

- u_n est le **terme de rang** (ou d'**indice**) n .
- u_{n+1} est le **terme qui suit** le terme u_n .

Dans un repère, une suite (u_n) est représentée par le nuage de points de coordonnées $(n; u_n)$ où $n \in \mathbb{N}$.

Mode de génération d'une suite

On a défini deux façons de définir une suite (u_n) .

- Par une **formule explicite**

Chaque terme u_n est défini en fonction de son rang n .

- Par une **formule de récurrence**

On donne le terme initial et un procédé qui permet de calculer pas à pas chaque terme à partir de celui qui le précède.

Sens de variation

- (u_n) est **croissante** lorsque, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- (u_n) est **décroissante** lorsque, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$, c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Lorsque $u_n = f(n)$:
 • si f est croissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est croissante ;
 • si f est décroissante sur $[0; +\infty[$, alors (u_n) est décroissante.

Si n entier naturel n , $u_n > 0$ alors on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1

Suite arithmétique

(u_n) de terme initial u_0 est **arithmétique** :
 on passe d'un terme u_n au suivant u_{n+1} en ajoutant toujours le même nombre r .

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \dots u_{n-1} \xrightarrow{+r} u_n$$

$+ n \times r$

- **Relation de récurrence** : $u_{n+1} = u_n + r$
 - **Terme général** : $u_n = u_0 + n \times r$
- Pour tous entiers n et p : $u_n = u_p + (n - p) \times r$

Suite géométrique

(u_n) de terme initial u_0 est **géométrique** :
 on passe d'un terme u_n au suivant u_{n+1} en multipliant par le même nombre q .

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \dots u_{n-1} \xrightarrow{\times q} u_n$$

$\times q^n$

- **Relation de récurrence** : $u_{n+1} = q \times u_n$
 - **Terme général** : $u_n = u_0 \times q^n$
- Pour tous entiers n et p : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

Limite d'une suite

Étudier la **limite** d'une suite (u_n) , c'est observer le comportement des termes lorsque n devient très grand.

- (u_n) **converge** vers un nombre L : les termes sont aussi proches de L que l'on veut pour n suffisamment grand.
- (u_n) **diverge** lorsqu'elle ne converge pas. Sa limite est égale à $-\infty$ ou $+\infty$ ou n'existe pas.

Sommes de termes consécutifs

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

- $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

- Soit q un nombre réel différent de 1 :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

*Somme des termes d'une suite
 géo : 1^{er} terme $\times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nb de termes}}}{1 - \text{raison}}$*

Exercice n°1 : Pour chaque suite, indiquer si elle est arithmétique (en précisant sa raison), géométrique (en précisant sa raison) ou ni l'une ni l'autre.

- 1) Pour tout entier naturel n , $u_n = 4n + 3$
- 2) Pour tout entier naturel n , $v_n = 5n^2$
- 3) Pour tout entier naturel n , $w_n = 3 \times 4^n$
- 4) Pour tout entier naturel n , $t_{n+1} = t_n + 7$ avec $t_0 = 2$
- 5) Pour tout entier naturel n , $s_n = \frac{4 \times (-5)^n}{3}$
- 6) Pour tout entier naturel n , $z_n = (2n + 3)^2 - 4n^2$

Exercice n°2 : Étudier le sens de variations des suites suivantes définie sur $\mathbb{N}$:

- 1) Pour tout entier naturel n , $u_n = -n^2 + 1$
- 2) Pour tout entier naturel n , $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{n+1}$ avec $t_0 = 2$
- 3) Pour tout entier naturel n , $v_n = \frac{n^2}{n+2}$
- 4) Pour tout entier naturel n , $w_n = \frac{5^n}{3^{n+1}}$

Exercice n°3 :

Un lac artificiel est alimenté en eau par un unique ruisseau dont le débit diminue de 20% d'un jour sur l'autre en raison d'une sécheresse. Pour la journée du 1^{er} juillet, son débit journalier est égal à $300m^3$. Pour tout entier naturel n non nul, on note d_n le débit journalier du ruisseau le n -ième jour du mois de juillet. Ainsi, $d_1 = 300$.

- 1) Calculer le débit journalier du ruisseau le 2 juillet, puis le 3 juillet.
- 2) Exprimer pour tout entier naturel $n \geq 1$, d_{n+1} en fonction de d_n .
- 3) En déduire la nature de la suite (d_n) .
- 4) Exprimer, pour tout entier naturel $n \geq 1$, d_n en fonction de n .
- 5) Calculer le débit journalier du ruisseau le 31 juillet.
- 6) Calculer le volume d'eau total apporté par le ruisseau au cours du mois de juillet. Arrondir au mètre cube.

Exercice n°4 :

En janvier 2010, Maya a versé 10 000 euros sur un compte épargne rémunéré à un taux annuel de 2%. Les intérêts que rapporte cette épargne sont calculés chaque 1^{er} janvier. Chaque année, le 2 janvier, elle retire 50€. Pour tout entier naturel n , on note C_n le capital acquis en janvier 2010 + n .

- 1) Déterminer C_0 , C_1 et C_2 .
- 2) Justifier que, pour tout entier naturel n , $C_{n+1} = 1,02C_n - 50$.
- 3) A l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variation et la limite de la suite (C_n) .
- 4) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = C_{n+1} - C_n$
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b) Quel est le signe de la suite (v_n) ? En déduire le sens de variation de la suite (C_n) .
- 5) Compléter la fonction seul ci-contre afin qu'elle renvoie l'année à partir de laquelle le capital aura doublé puis donner cette année à l'aide du menu Suites de la calculatrice .

```

fonction seul(M)
C ← ...
n ← ...
Tant que C ... Faire
    C ← ...
    n ← n + 1
Fin Tant que
Retourner ...
Fin fonction
    
```

2^{ème} partie : Dérivation et Études de fonctions

Synthèse rappels de cours

Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Dérivée f'
$f(x) = k$ (k constante réelle)	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^n$ (n est un entier non nul)	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Opérations sur les dérivées

Fonction f	Dérivée f'
$u + v$	$u' + v'$
$k \times u$	$k \times u'$
$u \times v$	$u'v + uv'$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
$f(x) = g(ax + b)$	$f'(x) = a \times g'(ax + b)$

Signe de f' et variations de f

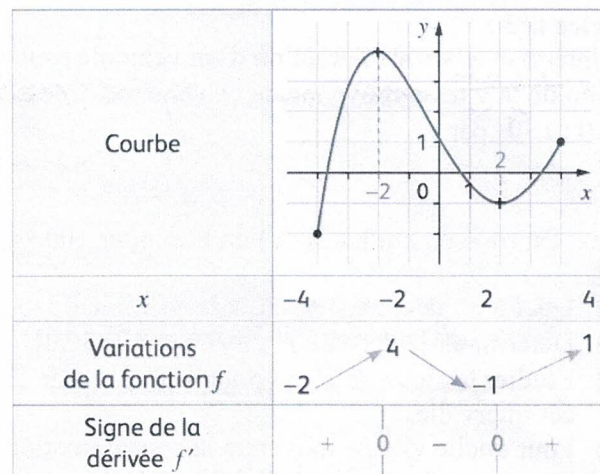
- f est croissante sur I équivaut à :
pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$
- f est décroissante sur I équivaut à :
pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$
- f est constante sur I équivaut à :
pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$

Étude des variations d'une fonction

- ① Calcul de la fonction dérivée f' .
- ② Étude du signe de la dérivée f' sur I .
- ③ Construction du tableau de variations.

x	Intervalle de définition de f
Signe de $f'(x)$	Signes
Variations de f	Variations et extremums locaux

- ④ Calcul des images.



Existence d'un extremum local

Si la fonction dérivée f' s'annule en a en changeant de signe de part et d'autre de a , alors f admet un extremum local en a .

x	0
Signe de $f'(x)$	+ 0 -
Variations de f	$\nearrow f(a) \searrow$

$f(a) = M$ est un maximum local

x	0
Signe de $f'(x)$	+ 0 -
Variations de f	$\searrow f(a) \nearrow$

$f(a) = m$ est un minimum local

* L'équation d'une tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est définie par:

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exercice n°1 :

Une entreprise fabrique chaque jour des pièces métalliques pour l'industrie automobile. La production quotidienne varie entre 0 et 25 pièces. Le montant des charges correspondant à la fabrication de x pièces, exprimé en euro, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[0 ; 25]$ par :

$$C(x) = x^3 - 30x^2 + 400x + 100$$

On suppose que l'entreprise vend chaque jour sa production journalière. Chaque pièce est vendue au prix de 247 euros.

- 1) Quelle est la recette (sommes totales perçues) pour x pièces vendues ?
- 2) On note B la fonction bénéfice, exprimée en euro. On rappelle que le bénéfice est égal à la différence entre la recette et les charges. Justifier que, pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 25]$:

$$B(x) = -x^3 + 30x^2 - 153x - 100$$

- 3) Calculer $B'(x)$ pour tout réel x de $[0 ; 25]$.
- 4) Étudier le signe de $B'(x)$ pour tout réel x de $[0 ; 25]$ puis en déduire le tableau de variations de la fonction B .
- 5) Combien l'entreprise doit-elle produire de pièces quotidiennement pour réaliser un bénéfice maximal ?

Exercice n°2 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

On note C_f sa courbe représentative.

- 1) Montrer que la tangente T à C_f au point d'abscisse -1 a pour équation $y = -3x$.
- 2) Justifier que, pour tout réel x , $f(x) - (-3x) = (x + 1)^3$
- 3) En déduire l'étude des positions relatives de la courbe C_f avec la tangente T .

Exercice n°3 :

On s'intéresse à la consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants. Cette consommation est une fonction de la vitesse moyenne de ce véhicule. Cette consommation est modélisée par la fonction f définie sur $[30 ; 130]$ par :

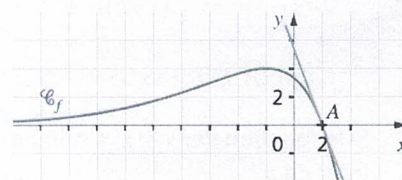
$$f(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30\,000}{x^2}$$

où x est exprimé en km/h et $f(x)$ en litre pour 100 km.

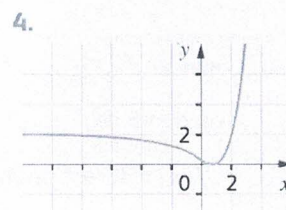
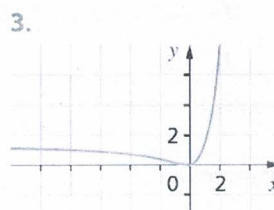
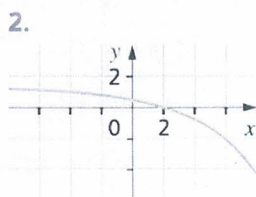
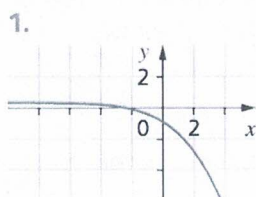
- 1) Quelle est la consommation de ce véhicule lorsqu'il roule à une vitesse moyenne de 50 km/h ?
- 2) Déterminer la dérivée f' de f sur $[30 ; 130]$.
- 3) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de $[30 ; 130]$ et en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.
- 4) Pour quelle vitesse moyenne la consommation est-elle minimale ? Que vaut alors cette consommation (arrondir à 0,01 près) ?

Exercice n°4 :

On a tracé ci-contre la représentation graphique C_f d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que sa tangente au point A d'abscisse 2.



Déterminer en justifiant, laquelle des quatre courbes proposées ci-dessous représente la fonction dérivée de f .



3^{ème} partie : Fonction exponentielle

Synthèse rappels de cours

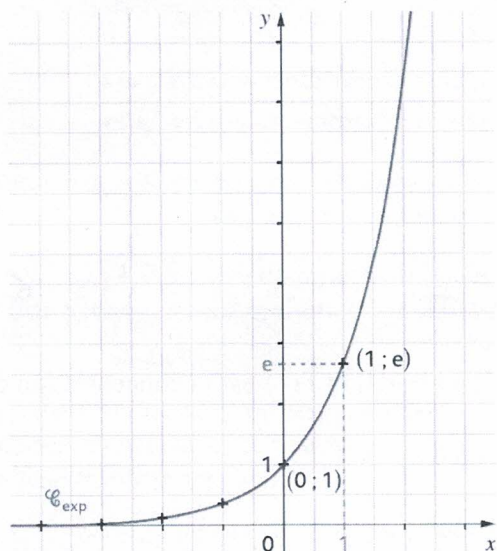
Définition

La fonction exponentielle est :

- définie et dérivable sur $\mathbb{R}$
- telle que $\exp(0) = e^0 = 1$
- pour tout réel x , on a :

$$\exp'(x) = \exp(x) = e^x$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$			+	
$\exp(x)$				e



La courbe est toujours située au-dessus de l'axe des abscisses.

$$e^x > 0$$

Propriétés algébriques

Pour tous réels x et y , et pour tout entier relatif n :

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{nx} = (e^x)^n$$

Équations et inéquations

Pour tous réels a et b :

$$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$$

$$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$$

$$e^a = 1 \Leftrightarrow a = 0$$

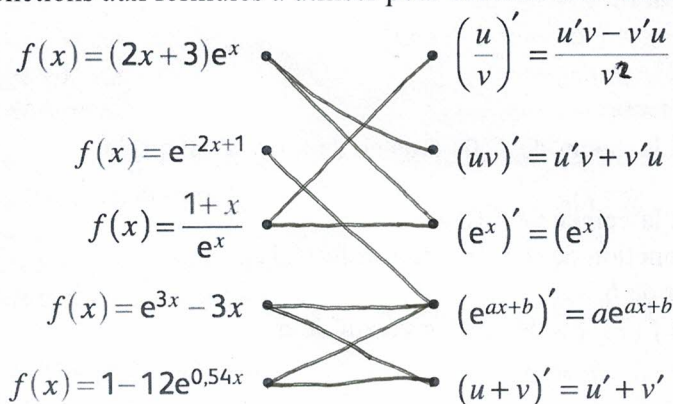
$$e^a < 1 \Leftrightarrow a < 0$$

$f(x) = e^{ax+b}$; a et b deux réels

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x , on a :

$$f'(x) = a \times e^{ax+b}$$

Exercice n°1 : Relier les fonctions aux formules à utiliser pour calculer leur fonction dérivée.



Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x+2}{e^x}$$

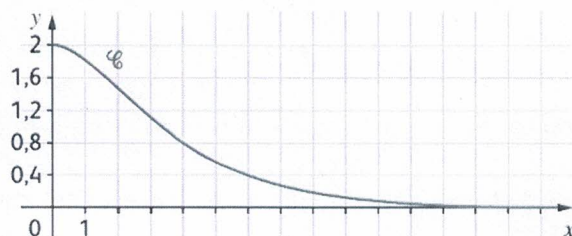
- 1) Montrer que pour tout réel x ,

$$f'(x) = \frac{-x-1}{e^x}$$

- 2) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout réel x .
- 3) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 4) On note C_f la courbe représentative de la fonction f .
 - a) Justifier que la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -1 est horizontale.
 - b) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.

Exercice n°3 :

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration de ce médicament dans le sang, en gramme par litre (g/L). On obtient la courbe suivante.



- 1) Avec la précision permise par le graphique, indiquer :
 - a) La concentration à l'instant initial ;
 - b) L'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 g/L.
- 2) On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(t) = (t+2)e^{-0,5t}$$

où t représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(t)$ est la concentration du médicament dans le sang (en g/L).

- a) Justifier que pour tout réel t de l'intervalle $[0 ; 15]$, on a :

$$f'(t) = -0,5te^{-0,5t}$$
- b) En déduire le tableau de variations complet de la fonction f .
- c) On estime que le médicament n'est plus actif lorsque sa concentration est strictement inférieure à 0,1 g/L. A l'aide de la calculatrice, déterminer pendant combien de temps le médicament est actif à 0,1h près.

Exercice n°4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$$

où a, b et c sont trois réels.

On note C_f sa courbe représentative.

- 1) Lire graphiquement la valeur de $f(0)$ puis en déduire la valeur de c .
- 2) Lire graphiquement la valeur de $f'(0)$.
- 3) Calculer $f'(x)$ en fonction de a, b et c pour tout réel x .
- 4) En déduire la valeur de b .
- 5) Lire graphiquement $f(1)$. En déduire la valeur de a .

